068-536

Mathématique

Épreuve de synthèse
Numéro 07

CORRIGÉ

5e secondaire

Août 2005

Formation générale des jeunes

CLÉ DE CORRECTION

Section A

Questions 1 à 10 *4 points ou 0 point* /48

1	D	**6**	A
2	A	**7**	C
3	C	**8**	B
4	C	**9**	D
5	B	**10**	B

Section B

11 /4

a) 4

b) 1

c) 2

d) 6

12 /4

a) ② -0,9

b) ③ 0,7

c) ⑤ 0

d) ④ -0,5

Section B

13 Exemple d'une démarche appropriée /4

x : nombre de signets
y : nombre de calendriers

Contraintes

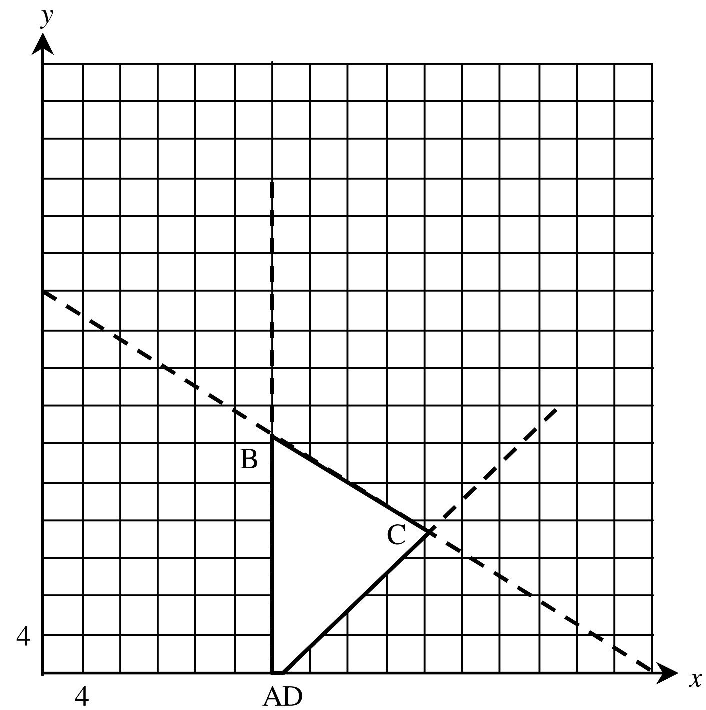
$y \geq 0$
$x \geq 24$
$x \leq y + 25$
$5x + 8y \leq 320$

Sommets du polygone

A (24,0)
B (24,25)
C (40,15)
D (25,0)

Fonction objectif $R = 5x + 7y$

A (24,0) $R = 5 \times 24 + 7 \times 0 = 120\$$
B (24,25) $R = 5 \times 24 + 7 \times 25 = 295\$$
C (40,15) $R = 5 \times 40 + 7 \times 15 = 305\$$
D (25,0) $R = 5 \times 25 + 7 \times 0 = 125\$$



Résultat Ils doivent fabriquer 40 signets et 15 calendriers.

14 Exemple d'une démarche appropriée /4

x : nombre de jours écoulés depuis le départ
$f(x)$: nombre d'insectes après x jours

$$f(x) = 25(1{,}3)^{\frac{x}{7}}$$
$$20\ 425 = 20(1{,}3)^{\frac{x}{7}}$$
$$817 = (1{,}3)^{\frac{x}{7}}$$
$$\frac{x}{7} = \log_{1,3}\ 817$$
$$x = \frac{7\ \log\ 817}{\log\ 1{,}3}$$
$$x \approx 178{,}9$$

Résultat On dénombrera 20 425 insectes après 179 jours.

15 Exemple d'une démarche appropriée /4

Circonférence de la roue

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r \\ &= 2\pi(33{,}5) \\ &= 67\pi \approx 210{,}49 \end{aligned}$$

Vitesse en cm/sec

$$20 \text{ km/h} = 2\ 000\ 000 \text{ cm/3600 sec} = \frac{5000}{9} \text{ cm/sec} \approx 555{,}\overline{5} \text{ cm/sec}$$

Période

$$p = \frac{67\pi}{\frac{5000}{9}} = \frac{603\pi}{5000}$$

Équation représentant la hauteur de la valve en fonction du temps écoulé en secondes

$h(t) = a\cos(bt) + k$

$a = 33{,}5$ $\quad k = 33{,}5$ $\quad b = \dfrac{2\pi}{603\pi / 500} = \dfrac{10\ 000}{63}$

$$h(t) = 33{,}5 \cos\left(\frac{10\ 000}{603}t\right) + 33{,}5$$

après 3 minutes $\quad t = 180$

$$h(180) = 33{,}5 \cos\left(\frac{10\ 000}{603} \bullet 180\right) + 33{,}5 = 61{,}85$$

Résultat Après 3 minutes, la valve se situe à 61,85 cm du sol.

16 Exemple d'une démarche appropriée /4

Équation avec sommet

$y = a|x - h| + k$

$y = a|x - 12| + 150$

Passant par (0,0)

$0 = a|0 - 12| + 150$

$a = -12{,}5$

$y = -12{,}5|x - 12| + 150$

Temps à 50 km/h

$50 = -12{,}5|x - 12| + 150$

$8 = |x - 12|$

$(x - 12) = 8$ ou $-(x - 12) = 8$

$x = 20$ sec $x = 4$ sec

Temps à 120 km/h

$120 = -12{,}5|x - 12| + 150$

$2{,}4 = |x - 12|$

$(x - 12) = 2{,}4$ ou $-(x - 12) = 2{,}4$

$x = 14{,}4$ sec ou $x = 9{,}6$ sec

Temps entre 50 km/h et 120 km/h

9,6 sec – 4 sec = 5,6 secondes

20 sec – 14,4 sec = 5,6 secondes

Résultat Le véhicule aura maintenu sa vitesse entre 50 km/h et 120 km/h pendant 11,2 secondes.

17 Exemple d'une démarche appropriée /4

Ordonnée au point (16,?)

$y = 15 \tan 25° \approx 6{,}99$ ou 7 m $\Rightarrow$ (16,7)

Règle de la fonction racine carrée

$f(x) = a\sqrt{(x-h)} + k$ avec b = 1

$f(x) = a\sqrt{(x-0)} + 15$ avec b = 1

Valeur de a à l'aide du point (16,7)

$7 = a\sqrt{16} + 15$

$\Rightarrow a = \text{-}2$

$f(x) = \text{-}2\sqrt{x} + 15$

Hauteur de la 2e poutre où $x = 8$

$f(x) = \text{-}2\sqrt{8} + 15$

$f(x) \approx 9{,}34$

Résultat La hauteur de la deuxième poutre est 9,34 mètres.

18 Exemple d'une démarche appropriée /4

$$\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = 2\sec^2 x$$

$$\frac{(1+\sin x)+(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = 2\sec^2 x$$

$$\frac{2}{1-\sin^2 x} = 2\sec^2 x$$

$$\frac{2}{\cos^2 x} = 2\sec^2 x \qquad \text{car } 1-\sin^2 x = \cos^2 x$$

$$2\sec^2 x = 2\sec^2 x$$

19 Exemple d'une démarche appropriée /4

Température vaut 15 °C

$$20 \sin\left(\frac{\pi}{13}s\right) + 2 = 15$$

$$\Leftrightarrow 20 \sin\left(\frac{\pi}{13}s\right) = 13$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{13}s\right) = \frac{13}{20}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{13}s\right) = 0{,}65$$

période $= p = \frac{2\pi}{|b|} \Leftrightarrow p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{13}\right|} \Leftrightarrow p = 26$

$\sin \theta = 0{,}65 \Leftrightarrow \theta_1 \approx 0{,}71$ et $\theta_2 \approx 2{,}43$

$$\frac{\pi s}{13} = 0{,}71 \Leftrightarrow s_1 \approx 2{,}93$$

$$\frac{\pi s}{13} = 2{,}43 \Leftrightarrow s_2 \approx 10{,}07$$

$$s_1 \approx 2{,}93$$

$$s_2 \approx 10{,}07$$

Étant donné que la période est 26 semaines, on trouve aussi:
$s_3 \approx 2{,}93 + 26 = 28{,}93$

$s_4 \approx 10{,}07 + 26 = 36{,}07$

Intervalles où la température est supérieure à 15 °C

$$s_2 - s_1 = 7{,}14$$

$$s_4 - s_3 = 7{,}14$$

Résultat Au cours de l'année, la température moyenne a été supérieure à 15 °C pendant 14,28 semaines.

20 Exemple d'une démarche appropriée /4

Mesure du rayon

$r = \sqrt{64} = 8$

Calcul du a

$a^2 = b^2 + c^2$

$= 64 + 64$

$a = \sqrt{128}$

Aire de l'ellipse

$A = \pi ab = \pi \bullet \sqrt{128} \bullet 8 \approx 284{,}34$

Aire du disque

$A = \pi r^2 = \pi \bullet 64 \approx 201{,}06$

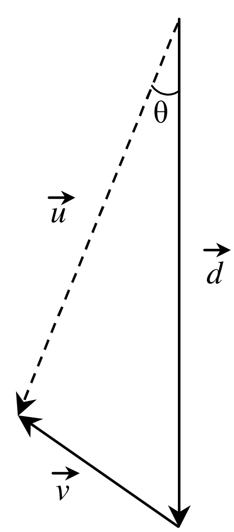
Aire de la partie hachurée

$284{,}34 - 201{,}06 = 83{,}28$

Résultat L'aire de la partie hachurée est 83,28 u^2

21 Exemple d'une démarche appropriée /4

Soit $\vec{u}$ le vecteur résultant



Norme du vecteur résultant

$\|\vec{u}\|^2 = 8^2 + 50^2 - 2 \times 8 \times 50 \times \cos 45°$

$\|\vec{u}\|^2 \approx 1998{,}31$

$\|\vec{u}\| \approx 44{,}7$

Direction

$\dfrac{44{,}7}{\sin 45°} = \dfrac{8}{\sin \theta}$

$\sin \theta = 0{,}1266$

$\theta = 7{,}3°$

$270° - 7{,}3° = 262{,}7°$

Résultat La vitesse réelle de la montgolfière est 44,7 km/h dans une direction de 262,7°.

22 Exemple d'une démarche appropriée /4

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
1. m $\angle$ ACB = 90°	Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.
2. m $\angle$ CAB + m $\angle$ CBA = 90°	Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
3. $x + 3x = 90°$ $x = 22{,}5°$ m $\angle$ CAB = 22,5° m $\angle$ CBA = 67,5°	Donnée du problème
4. m $\overset{\frown}{AC} = 2 \bullet 67{,}5° = 135°$	Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit correspond à la demi-mesure de l'arc intercepté par les côtés de l'angle.
5. m $\overset{\frown}{CB} = 2 \bullet 22{,}5° = 45°$	Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit correspond à la demi-mesure de l'arc intercepté par les côtés de l'angle.
6. m $\angle$ CDA $= \dfrac{(m\,\overset{\frown}{AC} - m\,\overset{\frown}{CB})}{2}$ $= \dfrac{(135° - 45°)}{2}$ $= 45°$	Dans un cercle, la mesure d'un angle extérieur correspond à la demi-différence des arcs interceptés par les côtés de l'angle.

Résultat La mesure de l'angle CDA est 45°.

23 Exemple d'une démarche appropriée /4

Longueur du segment BD

$$\sin 28° = \frac{m\ \overline{BD}}{10} \Rightarrow m\ \overline{BD} \approx 4{,}695 \text{ cm}$$

Longueur du segment DH

Par Pythagore

$$\left(m\ \overline{BD}\right)^2 = \left(m\ \overline{BH}\right)^2 + \left(m\ \overline{HD}\right)^2$$
$$(4{,}695)^2 = 4^2 + \left(m\ \overline{HD}\right)^2$$
$$m\ \overline{HD} \approx 2{,}458 \text{ cm}$$

Longueur du segment HC

$$\frac{m\ \overline{DH}}{m\ \overline{HC}} = \frac{m\ \overline{BH}}{m\ \overline{DH}}$$

car dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\frac{2{,}46}{m\ \overline{HC}} = \frac{4}{2{,}46}$$
$$4\ m\ \overline{HC} = 6{,}05$$
$$m\ \overline{HC} \approx 1{,}51$$

Résultat La longueur du segment HC est 1,51 cm.

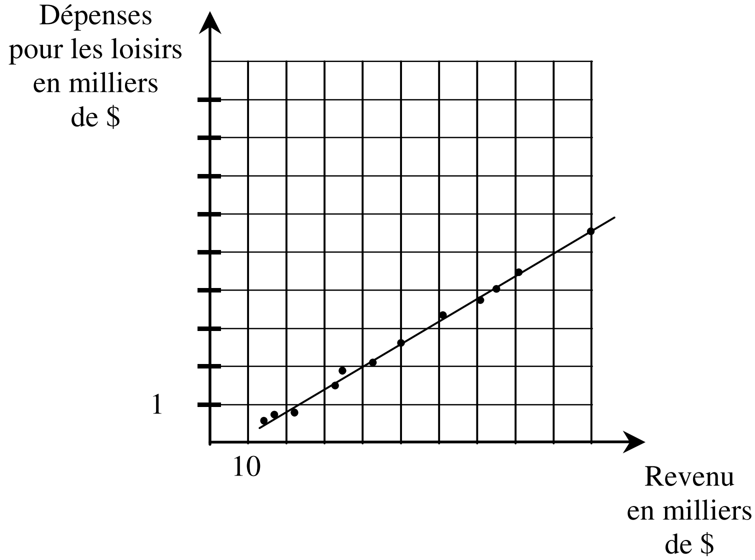
24 Exemple de démarches appropriées /4

1- Avec la calculatrice à affichage graphique

La droite de régression : $y = 0{,}062x - 494{,}28$
Pour un salaire de 150 000 \$ = $x \Rightarrow y = 8\,805{,}72$ \$

La somme de 8 805,72 \$ sera consacrée aux loisirs pour une famille ayant un revenu de 150 000 \$.

2- Dans le plan



Les points (25 000,1 000) et (90 000,5 000)

$\Rightarrow y = 0{,}062x - 538{,}46$

Et pour $x = 150\,000$ \$ $\Rightarrow y = 8\,761{,}54$ \$

Résultat La somme de 8 761,54 \$ sera consacrée aux loisirs pour une famille ayant un revenu de 150 000 \$.

Note Les différentes démarches permettent de trouver une somme consacrée aux loisirs comprise entre 8 500 et 9 000\$.

25 Exemple d'une démarche appropriée /4

Niveau	Moyenne de niveau	Écart type	Macarons vendus	Cote standard
1re secondaire	18,2	3,8	30	3,11
2e secondaire	16,46	2,7	25	***3,163***
3e secondaire	11	***5***	25	2,8
4e secondaire	10	4	***22***	3
5e secondaire	***6***	***7***	***24***	***2,571***

Cote standard de l'élève de 2e secondaire

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{25 - 16{,}46}{2{,}7} \approx 3{,}163$$

Macarons vendus en 4e secondaire

$$\frac{M - \bar{x}}{\sigma} = \frac{M - 10}{4} = 3$$

$$M = 22 \text{ macarons}$$

Le nombre de macarons vendus en 5e secondaire est de 24

$$\sqrt{\text{variance}} = \text{écart type}$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\frac{x - \bar{x}}{\sigma} \geq 3{,}163$$

$$\frac{x - 6}{7} \geq 3{,}163$$

$$x \geq 28{,}141$$

Nombre de macarons de plus

$29 - 24 = 5$

Résultat Il manquait 5 macarons à l'élève de cinquième secondaire pour mériter le premier prix.