SOLUTIONS EXAMEN #01

Section A

Questions 1 à 8 *4 points ou 0 point* /32

1 A

2 A

3 D

4 B

5 B

6 C

7 B

8 A

Section B

9 La règle de correspondance est $E(t) = 4|t - 3| + 6$. *4 points ou 0 point* /4
Accepter une règle de correspondance équivalente.

10 La règle de correspondance de la réciproque est $f^{-1}(x) = \dfrac{-10}{x - 3} - 1$. *4 points ou 0 point* /4

11 L'ensemble-solution de cette inéquation est [-1, 7]. *4 points ou 0 point* /4

Note Accepter une notation équivalente pour l'ensemble-solution.

12 Le produit scalaire des vecteurs *u* et *v* est -75. *4 points ou 0 point* /4

Section C

13 Exemple d'une démarche appropriée /4

$\sec t - \cos t\,(\sec^2 t - 1) = \cos t$

$$\frac{1}{\cos t} - \cos t\,(\tan^2 t) = \cos t$$

$$\frac{1}{\cos t} - \cos t\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right) = \cos t$$

$$\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \cos t$$

$$\frac{1 - \sin^2 t}{\cos t} = \cos t$$

$$\frac{\cos^2 t}{\cos t} = \cos t$$

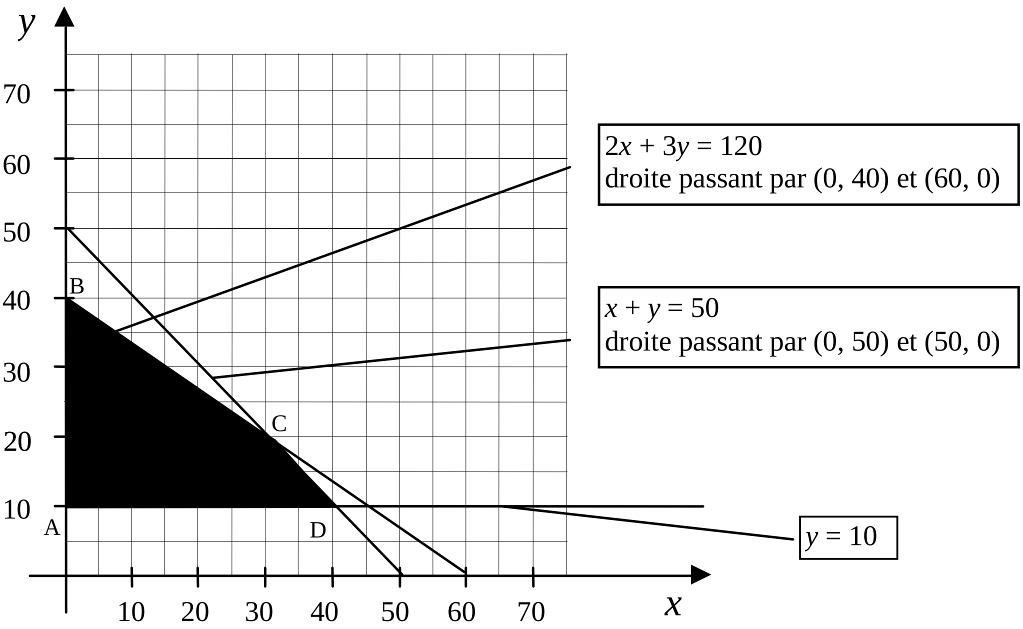
$\cos t = \cos t$

14 Exemple d'une démarche appropriée /4

Soit x : le nombre de vases
y : le nombre de sucriers

Système de contraintes : $x \geq 0$ et $y \geq 0$
$y \geq 10$
$2x + 3y \leq 120$
$x + y \leq 50$

Représentation graphique des contraintes



Fonction économique (à maximiser) : $14x + 10y$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes
A(0, 10) B(0, 40) C(30, 20) D(40, 10)

Sommets	Valeur de la fonction à maximiser $14x + 10y$
A(0, 10)	$14 \times 0 + 10 \times 10 = 100$
B(0, 40)	$14 \times 0 + 10 \times 40 = 400$
C(30, 20)	$14 \times 30 + 10 \times 20 = 620$
D(40, 10)	$14 \times 40 + 10 \times 10 = 660$

Résultat Cynthia doit peindre 40 vases et 10 sucriers.

15 Exemple d'une démarche appropriée /4

Règle de correspondance

$C(n) = 10 - 0{,}40\left\lfloor \frac{n}{100} \right\rfloor$

Nombre de kilogrammes de sucre commandé

$4 = 10 - 0{,}40\left\lfloor \frac{n}{100} \right\rfloor$

$-6 = -0{,}40\left\lfloor \frac{n}{100} \right\rfloor$

$15 = \left\lfloor \frac{n}{100} \right\rfloor$

L'élève détermine l'ensemble-solution par essais et erreurs.

Résultat Le nombre de kilogrammes de sucre commandé par le client est [1500, 1600[en kilogrammes.

Note Accepter une notation équivalente pour l'ensemble-solution.

16 Exemple d'une démarche appropriée /4

Soit x, le nombre d'années

$G(x) = 40\,000(1 - 0{,}03)^x$
$M(x) = 10\,000(1 + 0{,}05)^x$

Les deux villes auront le même nombre d'habitants lorsque $G(x) = M(x)$.

$$\begin{aligned}
40\,000(0{,}97)^x &= 10\,000(1{,}05)^x \\
4(0{,}97)^x &= (1{,}05)^x \\
4 &= \frac{(1{,}05)^x}{(0{,}97)^x} \\
4 &= \left(\frac{1{,}05}{0{,}97}\right)^x \\
\log 4 &= \log\left(\frac{1{,}05}{0{,}97}\right)^x \\
\log 4 &= x \log\left(\frac{1{,}05}{0{,}97}\right) \\
\frac{\log 4}{\log\left(\frac{1{,}05}{0{,}97}\right)} &= x \\
17{,}49 &\approx x
\end{aligned}$$

Résultat Les deux villes auront le même nombre d'habitants dans 17,49 années.

17 Exemple d'une démarche appropriée /4

Calcul du volume du prisme

$$V \leq 64$$
$$2(2x - 2)(x - 1) \leq 64$$
$$4x^2 - 8x + 4 \leq 64$$
$$4x^2 - 8x - 60 \leq 0$$
$$x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

Zéros du polynôme

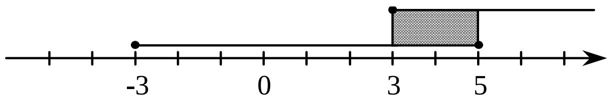
$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$(x - 5)(x + 3) = 0$$
$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

L'inéquation $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ est vraie pour l'intervalle [-3, 5].

Calcul de la longueur

$$(2x - 2) \geq 4$$
$$2x \geq 6$$
$$x \geq 3$$

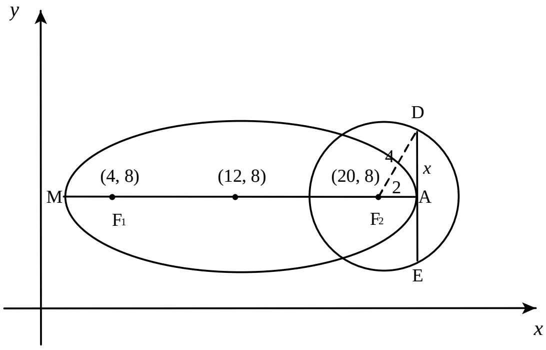
Solution du système $(x^2 - 2x - 15 \leq 0) \cap (2x - 2 \geq 4)$



Résultat Les conditions sont respectées pour les valeurs de x dans [3, 5] mètres.

18 Exemple d'une démarche appropriée /4

Centre C de l'ellipse
(12, 8)



Coordonnées du foyer F_2

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 10^2 - 6^2$

$c^2 = 64$

$c = 8$

Les coordonnées de F_2 sont (20, 8).

Mesure de la corde DE

$(\text{m } \overline{DA})^2 = (\text{m } \overline{FD})^2 - (\text{m } \overline{FA})^2$

$(\text{m } \overline{DA})^2 = 4^2 - 2^2$

$(\text{m } \overline{DA})^2 = 12$

$\text{m } \overline{DA} = \sqrt{12}$

$\text{m } \overline{DE} = 2(\text{m } \overline{DA})$

$\text{m } \overline{DE} = 2\sqrt{12}$

$\text{m } \overline{DE} \approx 6{,}93$

Résultat La longueur de la corde DE est de 6,93 cm.

19 Exemple d'une démarche appropriée /4

La règle $\dfrac{(x-3)^2}{64} - \dfrac{(y-4)^2}{36} = 1$ est celle d'une hyperbole de centre (3, 4).

Coordonnées des foyers de l'hyperbole

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 8^2 + 6^2$

$c = 10$

Les coordonnées des foyers sont (13, 4) et (-7, 4).

Distance entre les 2 foyers

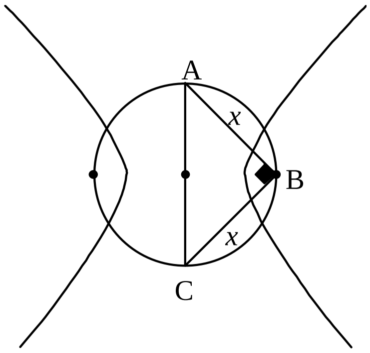
$d = |13 - (-7)|$
$d = 20$

Diamètre du cercle

D = 20

Mesure d'un côté de l'angle droit du triangle rectangle isocèle

$2x^2 = 20^2$
$2x^2 = 400$
$x^2 = 200$
$x \approx 14{,}14$



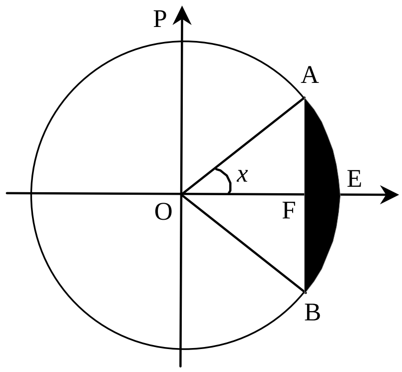
Périmètre du triangle

P ≈ 14,14 + 14,14 + 20
P ≈ 48,28

Résultat Le périmètre du triangle rectangle isocèle ABC est de 48,28 cm.

20 Exemple d'une démarche appropriée /4

Mesure de l'angle x



$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m\ \angle x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m\ \angle x = 60° \qquad \text{ou} \qquad m\ \angle x = \frac{\pi}{3} \text{ radians}$$

Base AB du triangle AOB

$$m\ \overline{AB} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Hauteur FO du triangle AOB

$$m\ \overline{FO} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Aire du triangle AOB

$$\text{Aire} = \left(\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43 \text{ unité carrée}$$

Aire du secteur AOB

$$\text{Aire du secteur AOB} = \pi(1)^2 \times \frac{120°}{360°} \approx 1{,}05 \text{ unité carrée}$$

Aire de la région noircie ≈ 1,05 – 0,43 = 0,62 unité carrée

Résultat L'aire de la région noircie est de 0,62 unité carrée.

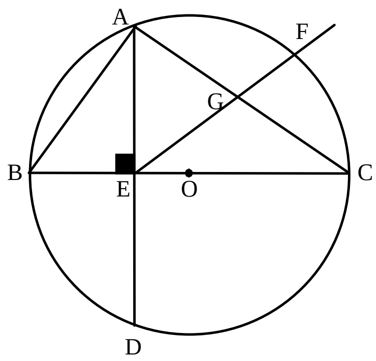
21 Exemple d'une démarche appropriée /4

Mesure du segment AE

$$m\ \overline{AE} = \frac{m\ \overline{AD}}{2}$$

$$m\ \overline{AE} = \frac{16}{2}$$

$$m\ \overline{AE} = 8$$



Mesure du segment EC

$$(m\ \overline{AE})^2 = m\ \overline{BE} \times m\ \overline{EC}$$

$$(m\ \overline{AE})^2 = 6 \times m\ \overline{EC}$$

$$8^2 = 6 \times m\ \overline{EC}$$

$$m\ \overline{EC} = \frac{64}{6}$$

$$m\ \overline{EC} \approx 10,\overline{6}$$

Mesure du segment AC

$$(m\ \overline{AE})^2 + (m\ \overline{CE})^2 = (m\ \overline{AC})^2$$

$$m\ \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 10,\overline{6}^2}$$

$$m\ \overline{AC} \approx 13{,}3 \text{ unités}$$

Mesure du segment AG

$$m\ \overline{AG} = \frac{m\ \overline{AC}}{2}$$

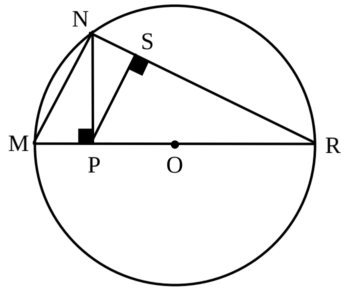
$$m\ \overline{AG} \approx \frac{13{,}3}{2}$$

$$m\ \overline{AG} \approx 6{,}6$$

Résultat La mesure du segment AG est de 6,6 unités.

Note Accepter un résultat dans [6, 7].

22 Exemple d'une démarche appropriée /4



ΔMNR est rectangle car m $\angle$MNR = 90°

$$m\ \angle MNR = \frac{180°}{2} = 90°$$

L'angle MNR est un angle inscrit et a pour mesure la moitié de celle de l'arc compris entre ses côtés.

$$m\ \overline{MR} = \sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$m\ \overline{MR} = 13$$

Relation de Pythagore dans le triangle rectangle MNR $(m\ \overline{MN})^2 + (m\ \overline{NR})^2 = (m\ \overline{MR})^2$

$$(m\ \overline{MN})^2 = (m\ \overline{MP}) \times (m\ \overline{MR})$$
$$5^2 = (m\ \overline{MP}) \times 13$$
$$m\ \overline{MP} \approx 1{,}923 \text{ cm}$$

Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

$$m\ \overline{NP} \approx \sqrt{5^2 - 1{,}923^2}$$
$$m\ \overline{NP} \approx 4{,}615$$

Relation de Pythagore dans le triangle rectangle MNP $(\overline{MP} \perp \overline{NP})$.

$$m\ \overline{PR} = m\ \overline{MR} - m\ \overline{MP}$$
$$m\ \overline{PR} \approx 13 - 1{,}923$$
$$m\ \overline{PR} \approx 11{,}077$$

$$m\ \overline{PN} \times m\ \overline{PR} = m\ \overline{PS} \times m\ \overline{NR}$$
$$4{,}615 \times 11{,}077 \approx m\ \overline{PS} \times 12$$
$$m\ \overline{PS} \approx \frac{4{,}615 \times 11{,}077}{12}$$
$$m\ \overline{PS} \approx 4{,}26$$

Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

Résultat Le segment PS mesure 4,26 cm.

Note Accepter un résultat dans [4,1; 4,3].

23 Exemple d'une démarche appropriée /4

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE}$ à démontrer

1. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GE}$

   par substitution car $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DE}$

2. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GE}$

   car $\overrightarrow{EF}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{FE}$

3. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GE}$

   par substitution car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$

4. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GE}$

   d'après la loi de Chasles $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

5. $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GE}$

   d'après la loi de Chasles $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GE}$

24 Exemple d'une démarche appropriée /4

L'élève a déterminé l'équation de la droite de régression (par la méthode de son choix).

1er exemple : démarche avec calculatrice

$y = 3{,}016x + 49{,}454$

L'élève a remplacé x par 14 pour déterminer la valeur de y.

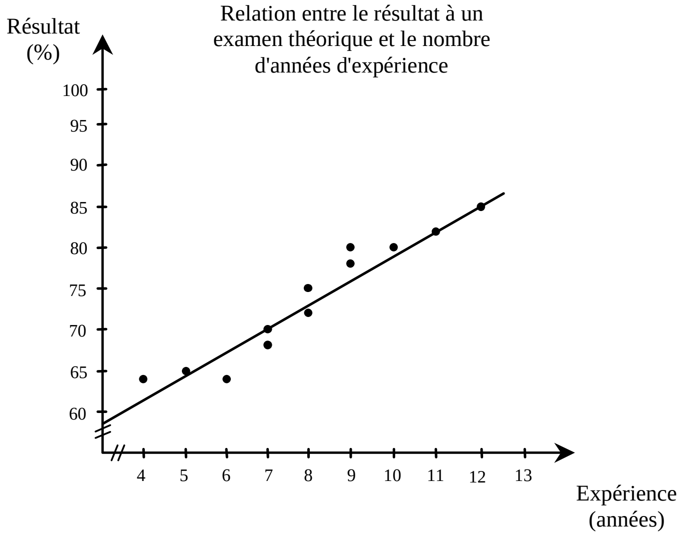
$y = 3{,}016x + 49{,}454$
$y = 14 \times 3{,}016 + 49{,}454$
$y = 91{,}68$

Résultat Le résultat à l'examen d'un conducteur ayant 14 ans d'expérience est de 91,68 %.

Note Accepter un résultat dans [90, 93].

2e exemple

Tracé de la droite de régression



Équation de la droite de régression

Soit les points (7, 70) et (12, 85)

$$m = \frac{85 - 70}{12 - 7}$$

$$m = \frac{15}{5}$$

d'où $y = 3x + b$

Valeur de b

Soit le point (10, 80)

$y = 3x + b$
$80 = 3(10) + b$
$80 = 30 + b$
$50 = b$

d'où $y = 3x + 50$

Pour $x = 14$, $y = 3(14) + 50$
$y = 42 + 50$
$y = 92$

Résultat Le résultat à l'examen d'un conducteur ayant 14 ans d'expérience est de 92 %.
Note Accepter un résultat dans [90, 93].

25 Exemple d'une démarche appropriée /4

Calcul de l'écart-type

Tania : $\dfrac{x-60}{s} = 3{,}0$

$x - 60 = 3s$

$x = 3s + 60$

Michel: $\dfrac{x-65}{s} = 2{,}0$

$x - 65 = 2x$

$x = 2s + 65$

Puisque Tania et Michel ont obtenu le même résultat, alors

$3s + 60 = 2s + 65$

$s = 5$

Calcul de la note

$3 = \dfrac{x-60}{5}$

$15 + 60 = x$

$x = 75$

Résultat Le résultat obtenu par ces deux élèves à l'examen d'admission est de 75 %.