SOLUTIONS EXAMEN #02

Section A

Questions 1 à 11 *4 points ou 0 point* /44

1 D

2 C

3 A

4 A

5 C

6 B

7 B

8 D

9 D

10 C

11 A

Section B

12 Le poids approximatif de cette personne est de 107,4 kg.
Acceptez un résultat dans [107, 109]. *4 points ou 0 point* /4

13 L'ensemble-solution de l'inéquation est $[7, 23[\cup]43, +\infty[$. *4 points ou 0 point* /4

14 On doit vendre 5600 litres d'essence ordinaire et 2800 litres d'essence super. *4 points ou 0 point* /4

15 Les composantes du vecteur *v* sont (2, 4). *4 points ou 0 point* /4

Section C

16 Exemple d'une démarche appropriée /4

$$\tan x + \cot x = \sec x \bullet \operatorname{cosec} x$$

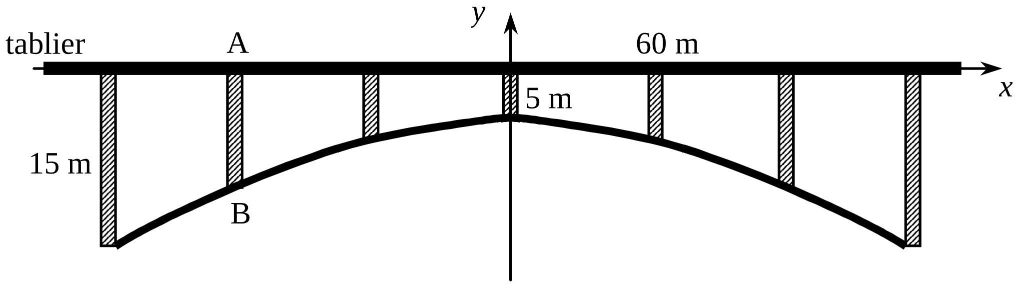
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\cos x)(\sin x)} =$$

$$\frac{1}{(\cos x)(\sin x)} =$$

$$\frac{1}{(\cos x)} \bullet \frac{1}{(\sin x)} = \sec x \bullet \operatorname{cosec} x$$

17 Exemple d'une démarche appropriée /4



L'équation de l'hyperbole est de la forme

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

où b = 5 car le tablier passe par le centre

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Valeur de a avec l'aide du point (60, -15) ou (60, 15)

$$\frac{15^2}{25} - \frac{60^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{60^2}{a^2} = \frac{15^2}{25} - 1$$

$$\frac{60^2}{a^2} = 8$$

$$a^2 = 450$$

d'où $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{450} = 1$

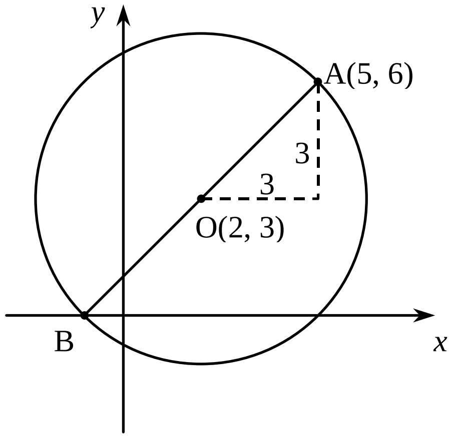
Longueur de la poutre AB où $x = 40$

$$\frac{y^2}{25} = 1 + \frac{40^2}{450}$$

$y \approx 10{,}67$

Résultat La longueur du pilier AB est de 10,67 mètres.

18 Exemple d'une démarche appropriée /4



Pente des rayons OA et OB

$$m = \frac{6 - 3}{5 - 2} = 1$$

Rayon du cercle

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

Équation du cercle

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 18$$

Équation du rayon OB

$$\frac{y - 3}{x - 2} = 1$$

$$y = x + 1$$

Résolution du système

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 18 \quad \text{et} \quad y = x + 1$$

En substituant y par $x + 1$ dans l'équation du cercle, on trouve $x = 5$ ou $x = -1$

Si $x = -1$, y vaut 0.

Les coordonnées de B sont (-1, 0).

Équation de la tangente au cercle

La pente de la tangente est -1, car elle est perpendiculaire au rayon OB dont la pente est 1.

$$\frac{y - 0}{x + 1} = -1$$

$$y = -x - 1$$

Résultat L'équation de la tangente au cercle passant par le point B est $x + y + 1 = 0$.

Note Accepter toute équation représentant la même tangente.

19 Exemple d'une démarche appropriée /4

Soit t, le temps écoulé depuis le début de l'an 2001
$C(t)$, le coût d'un panier d'épicerie

Règle de la fonction exponentielle
$C(t) = 200(1{,}03)^t$

Valeur de t lorsque $C(t) = 250$

$$250 = 200(1{,}03)^t$$
$$1{,}25 = (1{,}03)^t$$
$$t = \log_{1{,}03} 1{,}25$$
$$t = \frac{\log 1{,}25}{\log 1{,}03}$$
$$t = 7{,}549\ldots \approx 7{,}5$$

Résultat Dans 7,5 ans, un panier d'épicerie coûtera 250 $.

20 Exemple d'une démarche appropriée /4

L'équation de la fonction valeur absolue est de la forme

$f(x) = \mathrm{a}|x - h| + k$

Quantité d'eau au début de l'opération : (0, 60)
Quantité d'eau minimale : (35, 45) = (h, k)

Valeur du paramètre a à l'aide du couple (0, 60)

$f(x) = \mathrm{a}|x - 35| + 45$

$60 = \mathrm{a}|0 - 35| + 45$

$\mathrm{a} = \frac{3}{7}$

Règle de la fonction

$$f(x) = \frac{3}{7}|x - 35| + 45$$

Valeurs de x pour que $f(x) < 53$

$\frac{3}{7}|x - 35| + 45 < 53$

$|x - 35| < 18,\overline{6}$

Soit $x - 35 < 18,\overline{6}$

$x < 53,\overline{6}$

Soit $-x + 35 < 18,\overline{6}$

$-x < -16,\overline{3}$

$x > 16,\overline{3}$

Durée où $f(x) < 53$

$53,\overline{6} - 16,\overline{3} \approx 37,\overline{3}$

Résultat La quantité d'eau dans l'aquarium est inférieure à 53 litres pendant 37,3 secondes.
Note Accepter 37 secondes comme résultat final.

21 Exemple d'une démarche appropriée /4

Recherche des règles de la forme

$$y = \mathrm{a}\sqrt{\mathrm{b}(x - h)} + k$$

Fonction 1 : $(h, k) = (0, 3)$
$(x, y) = (4, 1)$

Posons b = 1

$$1 = \mathrm{a}\sqrt{1(4 - 0)} + 3$$
$$\mathrm{a}\sqrt{4} = -2$$
$$\mathrm{a} = -1$$
$$y = -\sqrt{x} + 3$$

Fonction 2 : $(h, k) = (2, 0)$
$(x, y) = (6, 2)$

Posons b = 1

$$2 = \mathrm{a}\sqrt{1(6 - 2)} + 0$$
$$\mathrm{a}\sqrt{4} = 2$$
$$\mathrm{a} = 1$$
$$y = \sqrt{x - 2}$$

Recherche du temps à l'intersection

$$-\sqrt{x} + 3 = \sqrt{x - 2}$$
$$\left(-\sqrt{x} + 3\right)^2 = \left(\sqrt{x - 2}\right)^2$$
$$x - 6\sqrt{x} + 9 = x - 2$$
$$-6\sqrt{x} = -11$$
$$\sqrt{x} = \frac{11}{6}$$
$$x \approx 3,6$$

Durée recherchée

$$3,36 - 2 = 1,36$$

Résultat Le 2^e^ projectile sera plus haut que le 1^er^ projectile après 1,36 seconde.

22 Exemple d'une démarche appropriée /4

Résolution de l'équation pour $i(t) = 9$

$$6 \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + 6 = 9$$

$$6 \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$$

$$\sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{arc sin}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \text{arc sin}\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi t}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi t}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} \qquad\qquad \frac{\pi t}{12} = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}$$

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{-3\pi}{6} \qquad\qquad \frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{6}$$

$$t = -6 \qquad\qquad t = 2$$

Période de la fonction

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$$

(Il s'écoule 24 secondes entre les signaux sonores.)

Nombre de secondes écoulées depuis le début de l'expérience

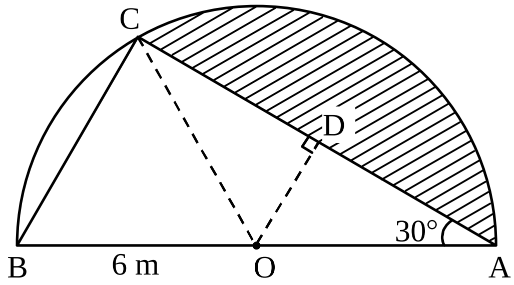
2	26	50	74	98	~~122~~
~~-6~~	18	42	66	90	114

Solutions ne faisant pas partie de l'intervalle donné

Résultat En 120 secondes, l'appareil a émis 10 signaux sonores.

23 Exemple d'une démarche appropriée /4

Le triangle ABC est rectangle en C car il est inscrit dans un demi-cercle.



Mesure de $\overline{BC}$

$$m\ \overline{BC} = \frac{m\ \overline{AB}}{2} = 6$$ car il est opposé à l'angle de 30° et sa longueur est la moitié de celle de l'hypoténuse.

Si on trace le rayon OC, on forme le triangle équilatéral BOC

Donc, $m\ \angle BOC = 60°$

Aire du secteur BOC

$$\frac{\pi r^2}{360°} = \frac{x}{60°}$$

$x \approx 18,85$ ou 6π

Mesure de $\overline{AC}$

$$m\ \overline{AC} = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10,39$$ Théorème de Pythagore

On trace la hauteur OD du triangle AOC

Mesure de $\overline{OD}$

$$m\ \overline{OD} = \frac{m\ \overline{OA}}{2} = 3$$ Côté opposé à l'angle de 30° du triangle rectangle AOD

Aire du triangle AOC

$$\frac{m\ \overline{AC} \times m\ \overline{OD}}{2} \approx \frac{10,39 \times 3}{2} \approx 15,59$$

Aire du demi-disque

$$\frac{\pi r^2}{2} \approx 56,55 \quad \text{ou} \quad 18\pi$$

Aire de la région hachurée

$56,55 - 15,59 - 18,85 = 22,11$

Résultat L'aire de la région hachurée est de 22,1 m^2.

24 Exemple d'une démarche appropriée /4

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ relation de Chasles

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ relation de Chasles

Produit scalaire

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) \quad \text{car } \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \quad \text{définition d'un losange} \\
&= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AB} \quad \text{distributivité} \\
&= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 \\
&= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \quad \text{définition du produit scalaire} \\
&= c^2 - c^2 \qquad c = \text{longueur d'un côté du losange} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ Théorème du produit scalaire

25 Exemple d'une démarche appropriée /4

Écart-type en physique

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{16}} = \sqrt{\frac{1296}{16}} = 9$$

Cote Z en physique

$$Z_p = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_p} = \frac{-9}{9} = -1$$

Cote Z en mathématique

$$Z_m = 2Z_p = -2$$

Écart-type en mathématique

$$Z_m = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_m}$$

$$-2 = \frac{-9}{\sigma_m}$$

$$\sigma_m = \frac{-9}{-2} = 4{,}5$$

Résultat Les résultats des élèves sont plus homogènes à l'examen de mathématique.